Math 342:
Abstract Algebra I
First semester 1431-1432
2010

Dr. Jehan Alawi Al-bar

jalbar@kau.edu.sa

This presentation is suitable for those who have had linear algebra 1 and math 251 {Set theory, Equivalence relations, Properties of Integers, Modular arithmetic, Functions} courses.

The material is from Contemporary Abstract Algebra, by Joseph Gallian, seventh edition.

التجريد

مثال تماثل المربع، symmetry of a square

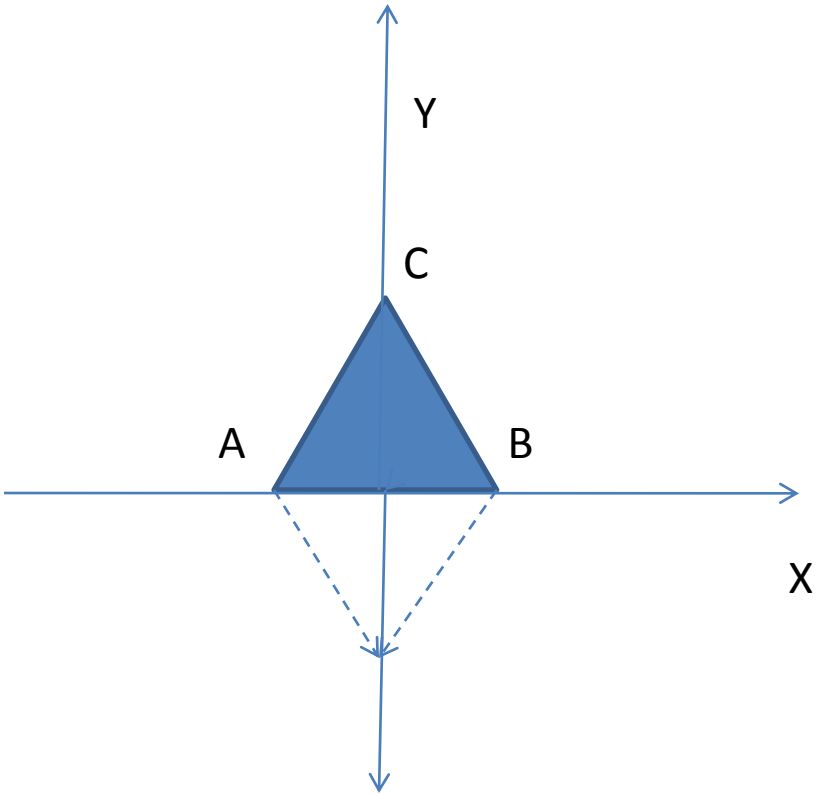
التعامل مع التفاصيل الواقعية بنظرة فاحصه مجردة

نستخلص كل الصفات المجردة ونربطها ببعض

نعمم الفكرة المجردة لتشمل بنائات اكثر واعمق

تطبيق الفكرة العامة المستخلصه في مجالات العلوم المختلفة

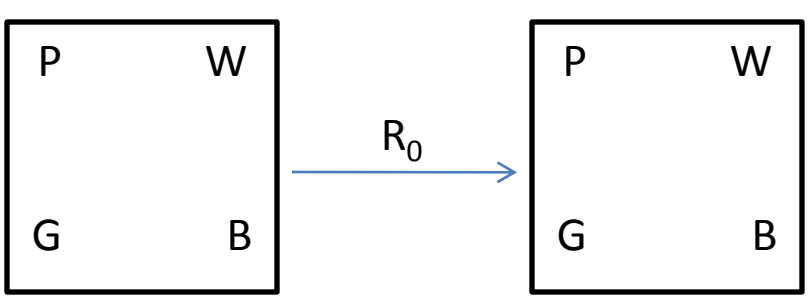
What do we mean by Symmetry?

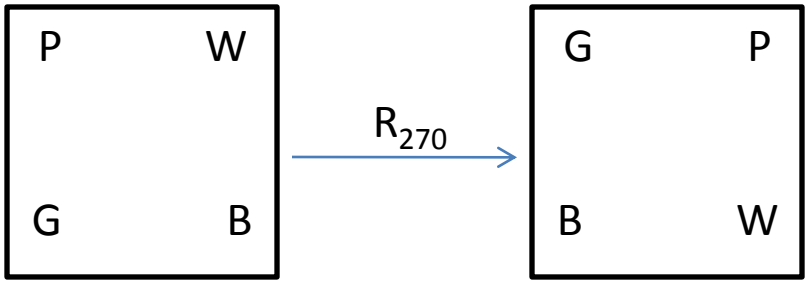


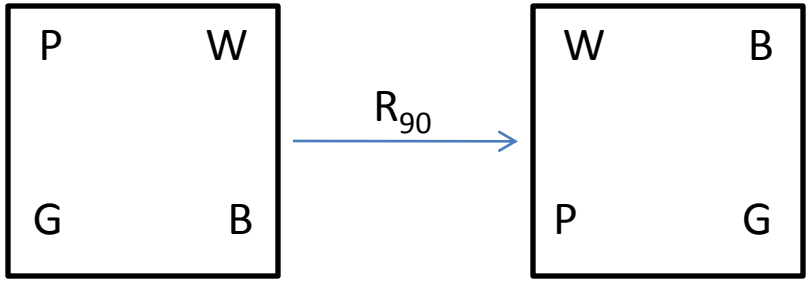
Symmetries of a Square

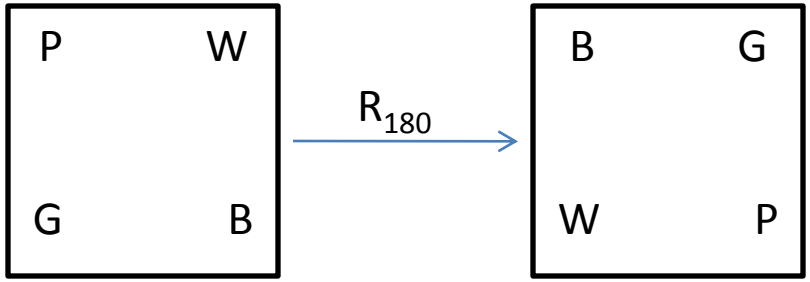
لنفرض اننا في منطقه في المستوى فرغنا جزء مربع الشكل،
نحركه بأي طريقه،
ثم نعيده في مكانه الأصلي.
هدفنا الآن ان نصف كل الطرق الممكنه لعمل ذلك.
تحديدا نريد ان نصف العلاقه بين الوضع الأصلي للمربع ووضعه النهائي بعد تحريكه.
هنا نهتم بالأثر النهائي للحركه وليس الحركه نفسها، مثلا:
الدوران ٩٠ درجه هو نفس الدوران ٤٥٠ درجه لأن لهما نفس الأثر النهائي على جميع النقاط.

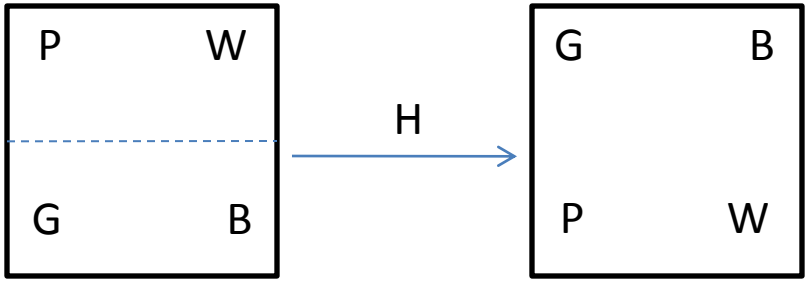
ندعي الآن ان اي حركه مهما كانت معقدة و مركبه لا تخرج عن احد ال ٨ حالات الممكنه التاليه:

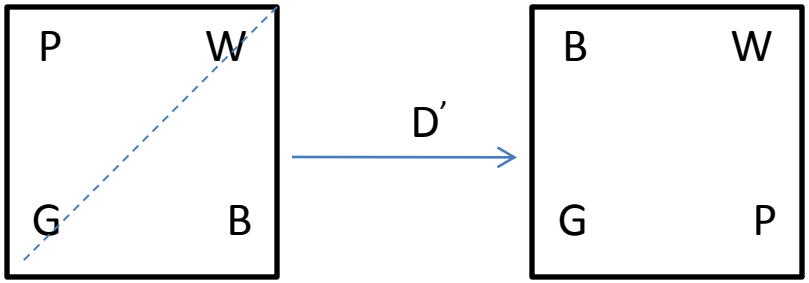

P W
G B
R_0
P W
G B

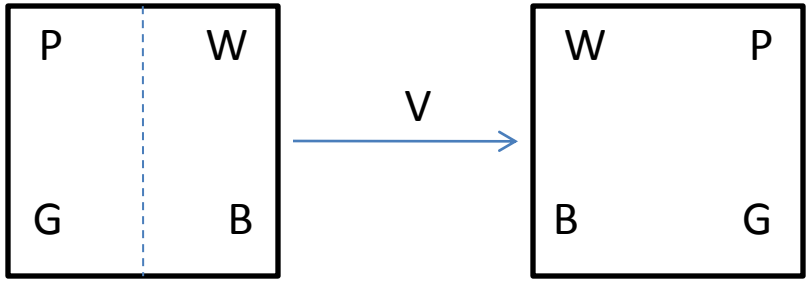

P W
G B
R_{270}
G P
B W

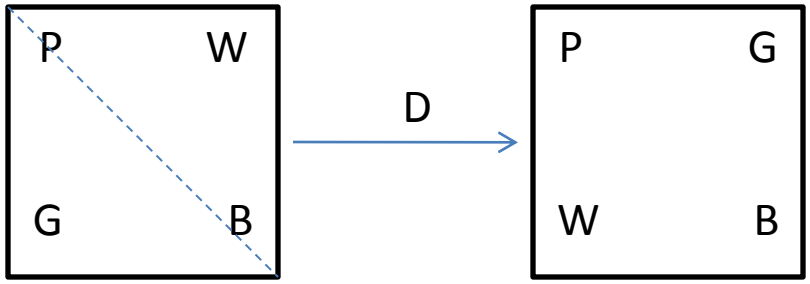

P W
G B
R_{90}
W B
P G


P W
G B
R_{180}
B G
W P


P
W
G
B
H
G
B
P
W


P
W
G
B
D′
B
W
G
P


P
W
G
B
V
W
P
B
G

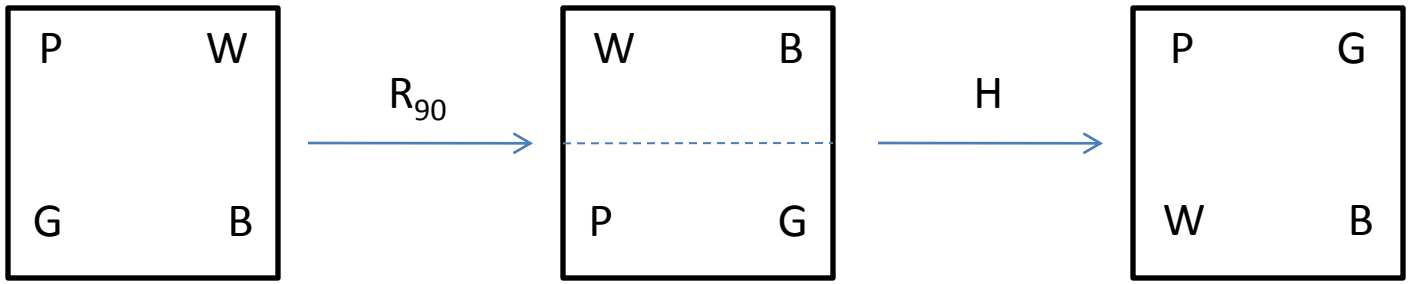

P
W
G
B
D
P
G
W
B

لماذا؟

- نلاحظ ان الوضع النهائي للمربع يختلف كل مرة تبعا لإختلاف موضع كل ركن وهل هذا الركن مواجه للأعلى ام للأسفل.
- اذاً هناك نوعين من الحركه
- كل ركن له اربعة احتمالات مختلفه لموقعه وهل مواجه للأعلى ام للأسفل
- اذن ٨ اوضاع مختلفه لكل ركن.

ماذا يترتب على كون كل حركه هي احد هذه الثمانية؟

نفرض اننا ندير المربع ٩٠ درجه ثم نقلبه حول المحور الأفقي للتماثل



نلاحظ ان الوضع النهائي هو D في الجدول السابق.

اذن نستطيع ان نجمع حركتين متتاليتين لنحصل على احد الحركات الثمانيه.

وهذا مقبول لأننا يمكن ان ننظر لتحريك المربع كدوال من المربع لنفسه وبالتالي نعتبره كتحصيل الدوال المعروف

Function Composition

اذن بلغة الدوال نلاحظ ان

$$HR_0 = D$$

اذن كل الحركات الثمانيه

$$R_0,\ R_{90},\ R_{180},\ R_{270},\ H, V, D, D'$$

مع عملية تحصيل الدوال تمثل بناء رياضي يعرف ب:

Dihedral Group of order 8

ويرمز له بالرمز

$$D_4$$

Cayley Table

	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D	D’
R_0	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D	D′
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0	D′	D	H	V
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}	V	H	D′	D
R_{270}	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}	D	D′	V	H
H	H	D	V	D′	R_0	R_{180}	R_{90}	R_{270}
V	V	D′	H	D	R_{180}	R_0	R_{270}	R_{90}
D	D	V	D′	H	R_{270}	R_{90}	R_0	R_{180}
D′	D′	H	D	V	R_{90}	R_{270}	R_{180}	R_0

دراسة جدول كايلي

١. عناصر الجدول لا تخرج عن احد الحركات الثمانيه.

بلغة الجبر

If A and B are in D_4, then so is AB

This is known as *the Closure Property*

هذه الخاصيه اساسيه و لازمة ليكون اي بناء رياضي *زمرة*

A Group

2. If A is any element of D_4, then $AR_0 = R_{0A} = A$

اذا تحصيل اي عنصر مع R_0 يعطي العنصر نفسه.

العنصر الذي له هذه الخاصية يسمى العنصر المحايد

Identity Element

Every Group must have one

3. We see for each element A in D_4, there is exactly one element B in D_4 such that

$$AB = BA = R_0$$

في هذه الحاله نقول ان B هي معكوس A و العكس صحيح.

مثلا :

R_{90} and R_{270} are inverses of each other and H is its own inverse.

If A and B are inverses of each other then B undoes whatever A does, means that A and B together in either order produce R_0, no change

٤. نلاحظ ان كل عنصر من عناصر D_4 يظهر مرة واحدة فقط في كل صف وكل عمود.

وهي صفة تتمتع بها الزمره

5. we note that in D_4

$$HD \neq DH \text{ but } R_{90}\ R_{180} = R_{180}\ R_{90}$$

اذا في الزمرة ممكن ان يكون

$$ab = ba.$$

اذا حصل ذلك لكل عناصر الزمرة نقول ان الزمرة ابدالية

Commutative Group or *Abelian Group*

Othetwise

Nonabelian

الى الآن طبقنا على الجدول ثلاثة صفات رئيسيه من اصل اربعة لنحصل على زمرة.
الخاصية الرابعة هي

The Associativity

(ab)c = a(bc) for all a,b and c in the set.

Will check all $8^3 = 512$ possible choice of a, b and c in D_4 ?

No, as function composition is associative as known.