الفصل السادس : المعادلات الأسية واللوغاريتمية

نعلم من تعريف الدالة الأسية واللوغاريتمية أن:

$$\log_a x = y \quad \Rightarrow \quad x = a^y, \quad a \neq 1, \quad a, x > 0$$

ملاحظة

1) إذا كان $a^m = a^n$ (بحيث أن $a > 0,\ a \neq 1$) فإن $m = n$.

2) إذا كان $x^m = y^m$ (بحيث أن $m \neq 0$ عدد فردي) فإن $x = y$.

مثال 1

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-5}$

بما إن الأساس متساوي فإن الأسس متساوية

$$x + 4 = 3x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3x = -5 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = -9$$

$$x = \frac{9}{2}$$

2) $e^{x^2} = e^{16}$

بما إن الأساس متساوي فإن الأسس متساوية

$$x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4$$

---

3) $5^3 = (x+2)^3$

بما إن الأسس متساوية فإن الأساس متساوي

$$5 = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

---

4) $2^{x-1} = 16$

$$2^{x-1} = 2^4$$

بما إن الأساس متساوي فإن الأسس متساوية

$$x - 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

4) $3\left(2^{x}\right)=12$

$$\frac{3\left(2^{x}\right)}{3}=\frac{12}{3}$$

$$2^{x}=4$$

$$2^{x}=2^{2}$$

بما إن الأساس متساوي فإن الأسس متساوية

$$\Leftrightarrow x=2$$

---

5) $5^{3x-2}=125$

$$5^{3x-2}=5^{3}$$

بما إن الأساس متساوي فإن الأسس متساوية

$$\Leftrightarrow 3x-2=3$$

$$\Leftrightarrow 3x=3+2$$

$$\Leftrightarrow 3x=5$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$

6) $\left(\sqrt[6]{64}\right)^{x+2}=16$

$$\left(\sqrt[6]{2^6}\right)^{x+2}=16$$

$$2^{x+2}=2^4$$

بما إن الأساس متساوي فإن الأسس متساوية

$$x+2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$$

---

7) $\left(\frac{1}{5}\right)^{7x-2}=(125)^{x-1}$

$$\left(5^{-1}\right)^{7x-2}=\left(5^3\right)^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad (5)^{-7x+2}=(5)^{3x-3}$$

بما إن الأساس متساوي فإن الأسس متساوية

$$-7x+2=3x-3 \quad \Leftrightarrow \quad -7x-3x=-3-2$$

$$-10x=-5 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{5}{10} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

مثال 2

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

1) $\log_x 64 = 3$

$$x^3 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 4^3$$

بما إن الأساس متساوي فإن الأسس متساوية

$$x = 4$$

---

2) $\log_4 64 = x$

$$4^x = 64 \quad \Leftrightarrow \quad 4^x = 4^3$$

بما إن الأساس متساوي فإن الأسس متساوية

$$x = 3$$

---

3) $\log_4 x = 3$

$$4^3 = x \quad \Leftrightarrow \quad 64 = x$$

---

4) $\log_8 (x+5) = \frac{1}{3}$

$$x + 5 = 8^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x + 5 = \sqrt[3]{8}$$

$$x + 5 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$$

5) $\log 5 + \log x = 2$

$$\log(5x) = 2$$

$$10^2 = 5x$$

$$100 = 5x$$

$$x = 20$$

---

6) $\log_x 125 = \frac{3}{2}$

$$x^{\frac{3}{2}} = 125 \quad \Leftrightarrow \quad x^{\frac{3}{2}} = 5^3$$

$$\sqrt{x^3} = 5^3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^3 = 5^3$$

بما إن الأسس متساوية فإن الأساس متساوي

$$\sqrt{x} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = (5)^2$$

$$x = 25$$