الدالة الكسرية

الدالة الكسرية (النسبية) هي الدالة على الصورة $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ بحيث أن $f_1(x)$ وَ $f_2(x)$ دوال كثيرات حدود وَ $f_2(x)\neq 0$.

مثال 1

الدوال التالية تمثل دوال نسبية (كسرية):

1) $f(x)=\frac{1}{x}$

2) $f(x)=\frac{x^2+4}{x^3-8}$

لأن جاءت على صورة بسط ومقام
وأيضا بسطها ومقامها كثيرات حدود

مثال 2

لماذا الدوال الآتية دوال غير كسرية؟

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x + 1}$$

ليست دالة كسرية لأن البسط ليست كثيرة حدود لاحتوائه على $\sqrt{x}$

$$2) f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{5x + 3}} = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{5x + 3}}$$

ليست دالة كسرية لأن البسط والمقام ليستا كثيرة حدود

$$3) f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^{\frac{5}{2}} + 7}$$

ليست دالة كسرية لأن المقام لا يمثل كثيرة حدود لاحتوائه $x^{\frac{5}{2}}$

$$4) f(x) = \frac{|x^2 + 5|}{2x + 3}$$

ليست دالة كسرية لأن البسط لا يمثل كثيرة حدود لاحتوائه على المقياس

مثال 3

أوجدي قيم الدوال الآتية عند قيم x المعطاة

$$1) f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x - 2}, \qquad (x = 0, 1, 2)$$

قيمة $f(x)$ عند $x = 0$:

$$f(0) = \frac{2(0)^2 - 5}{(0) - 2} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

قيمة $f(x)$ عند $x = 1$:

$$f(1) = \frac{2(1)^2 - 5}{(1) - 2} = \frac{2 - 5}{1 - 2} = \frac{-3}{-1} = 3$$

قيمة $f(x)$ عند $x = 2$:

$$f(2) = \frac{2(2)^2 - 5}{(2) - 2} = \frac{8 - 5}{2 - 2} = \frac{5}{0}$$

أي أن الدالة غير معرفة عند $x = 2$ لأن المقام 0

مجال الدوال الكسرية

مجال الدالة الكسرية هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ماعدا أصفار المقام. أي أن مجال الدالة الكسرية هو $R - \{\text{أصفار المقام}\}$.

أصفار المقام هي الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفر.

مثال 4

أوجد مجال الدوال التالية:

$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

1) نضع المقام يساوي صفر لنوجد أصفار المقام

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

مجال الدالة هو $R-\{2\}$.

أو المجال هو $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

$$f(x)=\frac{4}{x^2+2x}$$

3) نضع المقام يساوي صفر

$$x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x=0, x=-2$$

مجال الدالة هو $R-\{0,-2\}$.

أو المجال هو $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$

مثال 5

حددي مجال الدوال التالية

1) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4$

$x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=\pm 2$

$D_f = R-\{2,-2\}$

2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$

$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0$

$(x-2)=0$ $\qquad$ $(x-3)=0$

$x=2$ $\qquad$ $x=3$

$D_f = R-\{2,3\}$

الدالة الجذرية

الدالة الجذرية هي الدالة على الصورة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ بحيث أن $g(x)$ دالة كثيرة حدود و n عدد طبيعي أكبر من الواحد.

مثال 6

الدوال التالية دوال جذرية:

1) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

2) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

لأنها جاءت على صورة

$\sqrt[n]{\text{كثيرة حدود}}$

مثال 7

لماذا الدوال الآتية دوال غير جذرية؟

$$1) f(x) = \sqrt{X} + 1$$

ليست دالة جذرية لأنها لم تأتي على صورة

$$\sqrt[n]{\text{كثيرةحدود}}$$

$$2) f(x) = \sqrt{\frac{5x+1}{3x+5}}$$

ليست دالة جذرية لأن داخل الجذر ليس كثيرة حدود

$$3) f(x) = \sqrt{|x^2 + 5|}$$

ليست دالة جذرية لأنها لأن داخل الجذر ليس كثيرة حدود

مثال 8

إذا كانت $f(x)=\sqrt{5x+1}$ أوجدي ما يلي

$$f(0)=\sqrt{5(0)+1}=\sqrt{0+1}=\sqrt{1}=1$$

$$f(1)=\sqrt{5(1)+1}=\sqrt{5+1}=\sqrt{6}$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\sqrt{5\left(\frac{1}{5}\right)+1}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$f\left(x^2+2\right)=\sqrt{5\left(x^2+2\right)+1}=\sqrt{5x^2+10+1}=\sqrt{5x^2+11}$$

مجال الدوال الجذرية

1) إذا كان دليل الجذر n عدد فردي فإن مجال الدالة الجذرية $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ هو R.

2) إذا كان دليل الجذر n عدد زوجي فإن مجال الدالة الجذرية $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق أن ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

مثال 9

أوجد مجال الدوال التالية:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$

2) $f(x)=\sqrt{x-2}$

3) $f(x)=\sqrt{1-x}$

الحل:

1) دليل الدالة الجذرية = 3 وهو عدد فردي ، بالتالي مجال الدالة هو R .

2) دليل الدالة الجذرية = 2 وهو عدد زوجي

$$x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$$

مجال الدالة هو

$$D_f = [2,\infty)$$
$$= \{x : x \geq 2\}$$

3) دليل الدالة الجذرية = 2 وهو عدد زوجي

$$1-x\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -1 \Leftrightarrow x\leq 1$$

مجال الدالة هو

$$D_f = (-\infty,1]$$
$$= \{x : x \leq 1\}$$

مثال 10

حددي مجال الدوال التالية

3) $f(x)=\sqrt[4]{2x-10}$

$n=4$ زوجي

$\therefore 2x-10\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 10$

$\frac{2x}{2}\geq\frac{10}{2}\Leftrightarrow x\geq 5$

$D_f=\{x:x\geq 5\}=[5,\infty)$

4) $f(x)=\sqrt[6]{10-5x}$

$n=6$ زوجي

$\therefore 10-5x\geq 0 \Leftrightarrow -5x\geq -10$

$\frac{-5x}{-5}\geq\frac{-10}{-5}\Leftrightarrow x\leq 2$

$D_f=\{x:x\leq 2\}=(-\infty,2]$