

الفصل 4.1 الـدوال

أولا : الأزواج المرتبة

إذا كان لدينا المجموعتين A, B وكان $x \in A$, $y \in B$ فإن (x, y) يسمى الزوج المرتب ويمثل هندسيا نقطة في المستوى

ملاحظة

$$(a, b) \neq (b, a) \quad (1)$$

(2) يكون الزوجان المرتبان $(a, b), (c, d)$ متساويان إذا كان $a = c$, $b = d$

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c, b = d \quad \text{أي أن}$$

ثانيا : حاصل الضرب الكارتيزي

يعرف حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين A, B غير خاليتين بأنه مجموعة

الأزواج المرتبة (x, y) حيث $x \in A, y \in B$ ويرمز له بالرمز $A \times B$

مثال (1)

أوجد $A \times B, B \times A$ للمجموعتين $A = \{2, 5\}, B = \{-2, 0, 3\}$

$$A \times B = \{2, 5\} \times \{-2, 0, 3\} = \{(2, -2), (2, 0), (2, 3), (5, -2), (5, 0), (5, 3)\}$$

$$B \times A = \{-2, 0, 3\} \times \{2, 5\} = \{(-2, 2), (-2, 5), (3, 2), (3, 5), (0, 2), (0, 5)\}$$

$$A \times B \neq B \times A \quad (1)$$

من المثال السابق نستنتج أن

(2) عدد عناصر $A \times B$ تساوي عدد عناصر $B \times A$ أي أن $|A \times B| = |B \times A|$

$$|A \times B| = |A| \times |B| \quad (3)$$

مثال (2) (1) إذا كان $|A| = 7, |B| = 10$ فإن $|A \times B| = |A| \times |B|$
 $= 7 \times 10 = 70$

(2) إذا كان $|A \times B| = 50, |B| = 25$ فإن $|A \times B| = |A| \times |B|$

$$50 = |A| \times 25$$

$$\frac{50}{25} = \frac{|A| \times 25}{25}$$

$$\therefore |A| = 2$$

(3) إذا كان $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d, e\}$ فإن $(3, e) \in A \times B$

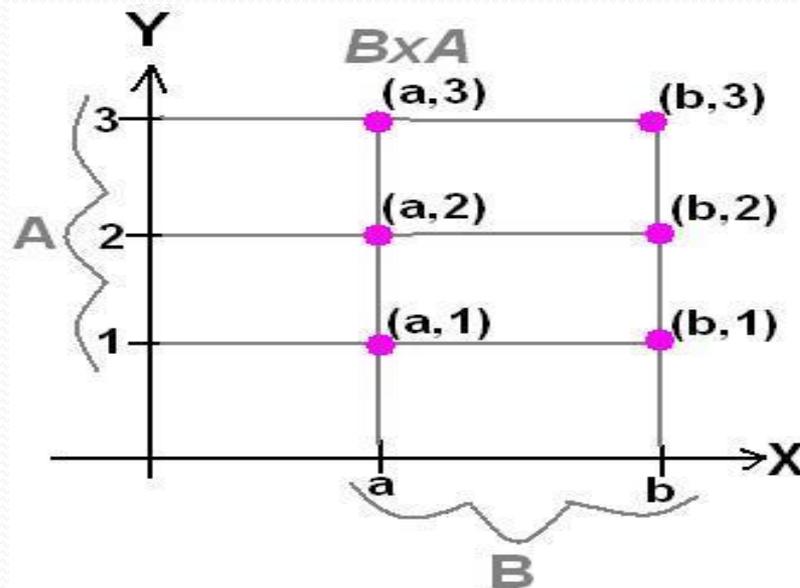
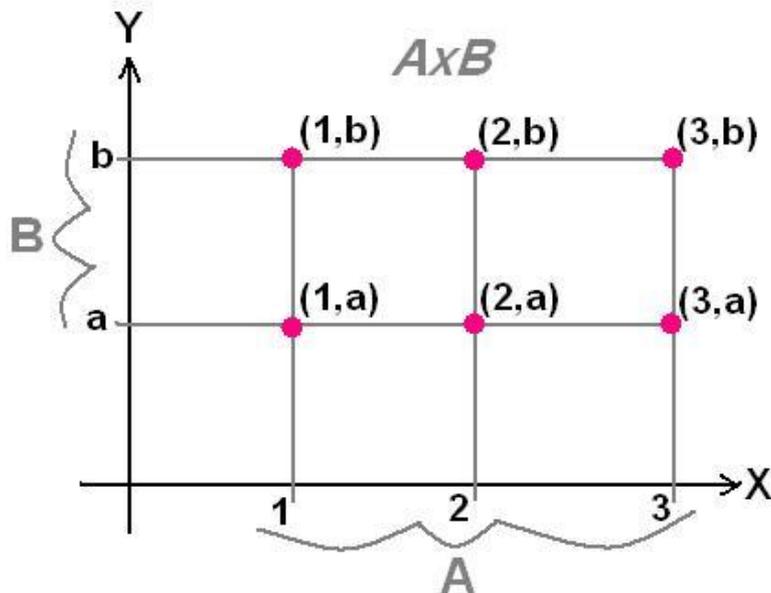
لأن $3 \in A, e \in B$ ولكن $(5, e) \notin A \times B$ لأن $5 \notin A$

أوجد $A \times B, B \times A$ للمجموعتين $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$

ثم مثلها ذلك بيانياً

$$A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$



ثالثا : العلاقة

يمكننا نعرف أي مجموعة أنها علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B إذا كانت مجموعة جزئية من $A \times B$

مثال (4)

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$ فهل تمثل المجموعات التالية علاقات

$A_1 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ من A إلى B

بما أن $A_1 = \underbrace{\{(1, a), (2, a), (3, b)\}}_{\in A \times B}$ إذن تمثل علاقة من A إلى B لأن $A_1 \subset A \times B$

$A_2 = \{(1, a), (1, b)\}$

بما أن $A_2 = \underbrace{\{(1, a), (1, b)\}}_{\in A \times B}$ إذن تمثل علاقة من A إلى B لأن $A_2 \subset A \times B$

$A_3 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

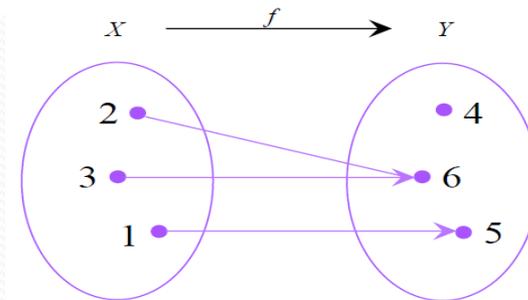
بما أن $A_3 = \underbrace{\{(1, a), (2, b)\}}_{\in A \times B} \cup \underbrace{\{(3, c)\}}_{\notin A \times B}$ إذن لا تمثل علاقة من A إلى B لأن $A_3 \not\subset A \times B$

رابعاً : الدالة

الدالة $f: X \rightarrow Y$ هي عبارة عن علاقة أو قاعدة بين مجموعتين غير خاليتين X و Y بحيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى X بعنصر وحيد من المجموعة الثانية Y .
المجموعة X تسمى مجال الدالة f ، ويرمز لها بالرمز D_f .
المجموعة Y تسمى بالمجال المقابل للدالة f .
المدى عبارة عن المجموعة التي تحتوي على صور أو قيم عناصر المجال، ويرمز لها بالرمز R_f ، حيث يمثل المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل.

مثال (5)

إذا كان لدينا العلاقة $f: X \rightarrow Y$ معرفة كالتالي:



العلاقة f تمثل دالة لأنها تحدد لكل عنصر من عناصر المجال X عنصر وحيد من عناصر المجال المقابل Y ، حيث المجال هو $\{1,2,3\}$ ، المجال المقابل هو $\{4,5,6\}$ ، المدى هو $\{5,6\}$.

مثال (6)

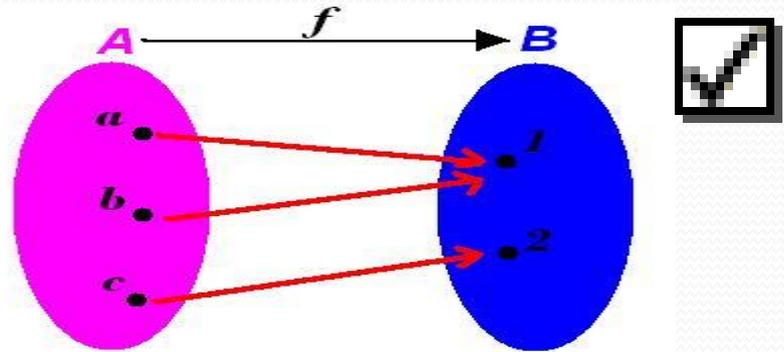
إذا كانت $f : A \rightarrow B$ معرفة كالتالي فإن

العلاقة f تمثل دالة لأن ارتبط كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط من المجال المقابل حيث

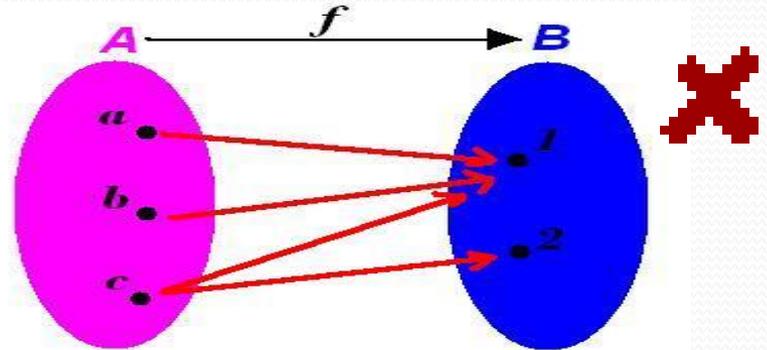
المجال $D_f = A = \{a, b, c\}$

المجال المقابل $B = \{1, 2\}$

المدى $R_f = \{1, 2\}$



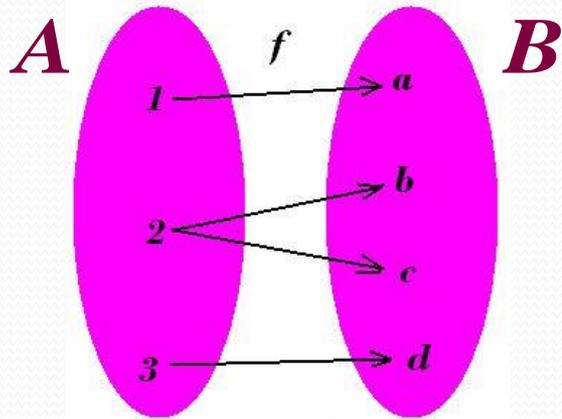
فإن العلاقة f لا تمثل دالة لأن العنصر c له صورتان هما 1 و 2



إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$ فهل تمثل العلاقات التالية دوال

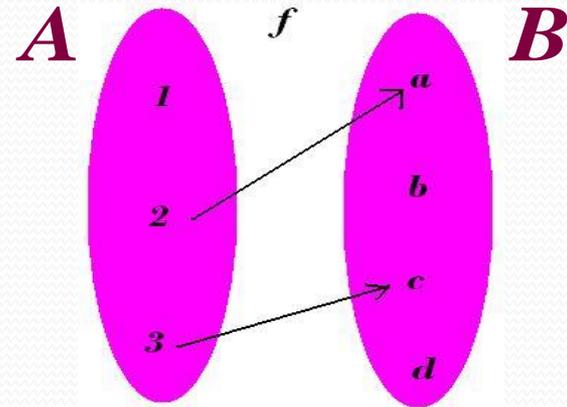
من A إلى B أو لا وفي حالة كونها دالة أوجدي مداها

$$f = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, d)\}$$



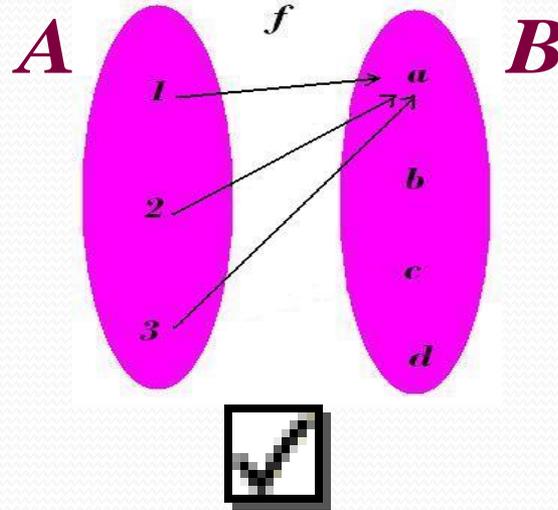
العلاقة f لا تمثل دالة لأن $2 \rightarrow c, 2 \rightarrow b$

$$f = \{(2, a), (3, c)\}$$



العلاقة f لا تمثل دالة لأن العنصر 1 ليس له صورة

$$f = \{(1,a), (2,a), (3,a)\}$$



العلاقة f تمثل دالة لأن كل عناصر المجال ارتبطت بعنصر واحد من المجال المقابل
إذن المدى هو $\{a\}$

ملاحظة

أي علاقة يسمى مجموعة الأعداد في الإحداثي الأول مجال العلاقة بينما مجموعة الأعداد
في الإحداثي الثاني مدى العلاقة

مثال (8)

أوجد المجال والمدى

$$1) \{(2,3), (4,6), (-1,0)\}$$

$$2) \{(0,0), (6,-1), (1,0)\}$$

الحل:

$$1) \text{ المدى} = \{3,6,0\} \quad , \quad \text{المجال} = \{2,4,-1\}$$

$$2) \text{ المدى} = \{0,-1\} \quad , \quad \text{المجال} = \{0,6,1\}$$

مثال (9)

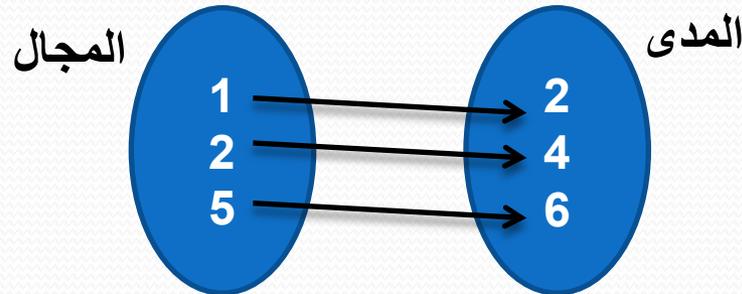
هل تمثل العلاقات التالية دوال؟

1) $\{(1,2), (3,4), (5,6)\}$

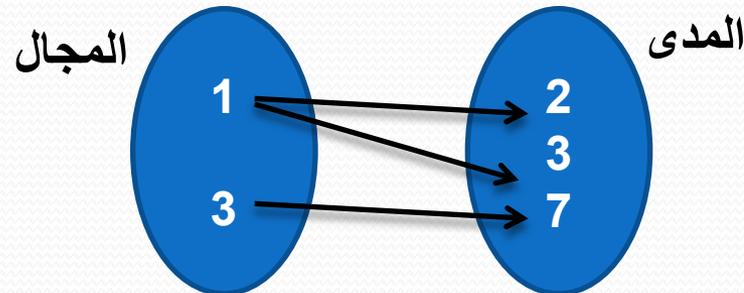
2) $\{(1,3), (1,2), (3,7)\}$

الحل:

(1) تمثل العلاقة دالة



(2) لا تمثل العلاقة دالة لأن العنصر 1 له صورتين وهما 2 و 3.



يمكن تعريف الدالة بطريقة الوصف بدلا من السرد وذلك بوصف عمل الدالة على عنصر اختياري x

مثال (10)

إذا كانت $f: R \rightarrow R$ وكانت معرفة كالتالي:

$$f(x) = 3x + 5$$

أوجد ما يلي:

$$f(0) = 3(0) + 5 = 0 + 5 = 5$$

$$f(1) = 3(1) + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$f(2) = 3(2) + 5 = 6 + 5 = 11$$

$$f(x+1) = 3(x+1) + 5 = 3x + 3 + 5 = 3x + 8$$

$$f(x^2) = 3x^2 + 5$$

مثال (11)

إذا كانت $f: R \rightarrow R$ وكانت معرفة كالتالي:

$$f(x) = x^3 + 3$$

أوجد ما يلي:

$$f(0) = (0)^3 + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$f(2) = (2)^3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$f(x^2) = (x^2)^3 + 3 = x^{2 \times 3} + 3 = x^6 + 3$$

مثال (12)

إذا كانت $f: R \rightarrow R$ وكانت معرفة كالتالي:

$$f(x) = 10$$

أوجد ما يلي: $f(0) = 10$ ، $f(-3) = 10$ ، $f(10x) = 10$