الفصل الخامس: معادلات من الدرجة الثانية

حل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد جبرياً

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في مجهول x هي:

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a,b,c\in R, \quad a\neq 0$$

لحل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد جبريا، لا بد من دراستها في الحالات التالية:

الحالة الأولى:

إذا كانت المعادلة على الصورة $ax^2+c=0$ (أي أن $b=0$)، $a\neq 0$ ،

يكون الحل كالتالي: $ax^2=-c \Leftrightarrow x^2=\frac{-c}{a} \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{-c}{a}} \Leftrightarrow |x|=\sqrt{\frac{-c}{a}} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$4x^2 - 25 = 0$$

$$4x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$|x| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{5}{4}$$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$4x^2 - 11 = 5$$

$$4x^2 - 11 = 5 \Leftrightarrow 4x^2 = 5 + 11$$

$$4x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{4}$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$2x^2 - 12 = 0$$

$$2x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 12$$

$$x^2 = \frac{12}{2} \Leftrightarrow x^2 = 6$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{6}$$

$$|x| = \sqrt{6} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$3x^2 + 6 = -9$$

$$3x^2 = -9 - 6$$

$$3x^2 = -15$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{-15}{3}$$

$$x^2 = -5$$

$$x = \pm\sqrt{-5} \notin R$$

فإن المعادلة لا يوجد لها حل في R.

الحالة الثانية:

إذا كانت المعادلة على الصورة $ax^2+bx=0$ (أي أن $c=0$)، $a\neq 0$ ، في هذه الحالة نأخذ عامل مشترك x فتصبح المعادلة على الصورة $x(ax+b)=0$ ، وعليه فإن حل المعادلة إما $x=0$ أو $x=-\frac{b}{a}$.

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$x^2-7x=0$$

$$\overbrace{x(x-7)=0}$$

$x=0$ or $x-7=0$

$x=7$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$2x^2-5x=0$$

$$\overbrace{x(2x-5)=0}$$

$x=0$ or $2x-5=0$

$2x=5$

$$x=\frac{5}{2}$$

الحالة الثالثة:

إذا كانت المعادلة على الصورة $ax^2+bx+c=0$ ، فإنه يمكن حلها بطريقتين هما:

1) طريقة التحليل (كما سبق في الباب الثاني).

2) طريقة القانون العام.

أولاً : طريقة التحليل

مثال أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$x-1=0$ or $x-2=0$

$x=1$, $x=2$

مثال أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$x-3=0$ or $x+1=0$

$x=3$, $x=-1$

ثانياً: طريقة القانون العام

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد حل لأي معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد على الصورة

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in R, \quad a \neq 0$$

حيث يعطى القانون العام بالعلاقة:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويسمى المقدار $b^2 - 4ac$ بالمميز، حيث لدينا ثلاث حالات للمميز:

1) إذا كان $b^2 - 4ac > 0$

فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

2) إذا كان $b^2 - 4ac = 0$

فإن للمعادلة جذران متساويان

3) إذا كان $b^2 - 4ac < 0$

فليس للمعادلة جذور حقيقية

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$a = 3 \quad , \quad b = 5 \quad , c = -2$$

أولاً : نوجد المميز :

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 3 \times (-2)$$

$$= 25 + 24$$

$$= 49 > 0$$

إذاً للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{-5+7}{6} \quad \text{or} \quad x = \frac{-5-7}{6}$$

$$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad x = \frac{-12}{6} = -2$$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$x^2 + x + 5 = 0$$

$$a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = 5$$

أولاً : نوجد المميز :

$$b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$$

$$= 1 - 20$$

$$= -19 < 0$$

إذاً لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$a = 9 \;,\; b = 6 \;,\; c = 1$$

أولاً : نوجد المميز :

$$b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 9 \times 1$$

$$= 36 - 36$$

$$= 0$$

إذاً هناك حلان متساويان حقيقيان (جذر واحد مكرر).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6}{2 \times 9} = \frac{-1}{3}$$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$x^2 = -2x - 1$$

نضع المعادلة في الصورة القياسية :

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

أولاً : نوجد المميز :

$$a = 1 \ , \ b = 2 \ , c = 1$$

$$b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$= 4 - 4 = 0$$

إذاً هناك حلان متساويان حقيقيان (جذر واحد مكرر).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

حل آخر:

نضع المعادلة في الصورة القياسية :

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)(x+1) = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{0}$$

$$|x+1| = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

حل المعادلات من الدرجة الثانية في صورة كسر

مثال أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$\frac{x-1}{3}=\frac{4}{x}$$

حاصل ضرب الوسطين = حاصل ضرب الوسطين وعليه نحصل على :

$$x(x-1)=12$$

$$x^2-x=12$$

$$x^2-x-12=0$$

$$(x-4)(x+3)=0$$

$$x-4=0 \quad \text{or} \quad x+3=0$$

$$x=4 \qquad\qquad x=-3$$

حل المعادلات من الدرجة الثانية في صورة جذر

مثال أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$\sqrt{x^2 - 3x} = 2$$

$$\left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)^2 = (2)^2$$

$$x^2 - 3x = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1)=0$$

$x - 4 = 0$ or $x + 1 = 0$

$x = 4$ $\qquad$ $x = -1$