الفصل الثالث : معادلات الخط المستقيم

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي:

$$Ax + By + C = 0 \quad , \quad A, B, C \in R \qquad (\text{بحيث } B \neq 0 \text{ أو } A \neq 0)$$

تعريف 3. 3. 1 (ميل الخط المستقيم)

يعرف ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) بأنه التغير في الاتجاه الرأسي إلى الاتجاه الأفقي ويرمز له بالرمز m ويعطى بالمعادلة:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال (1)

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,5)$ ، $(8,10)$.

الحل:

$$(x_1, y_1) = (3,5) \Rightarrow x_1 = 3 \ , \ y_1 = 5$$

$$(x_2, y_2) = (8,10) \Rightarrow x_2 = 8 \ , \ y_2 = 10$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-5}{8-3} = \frac{5}{5} = 1$$

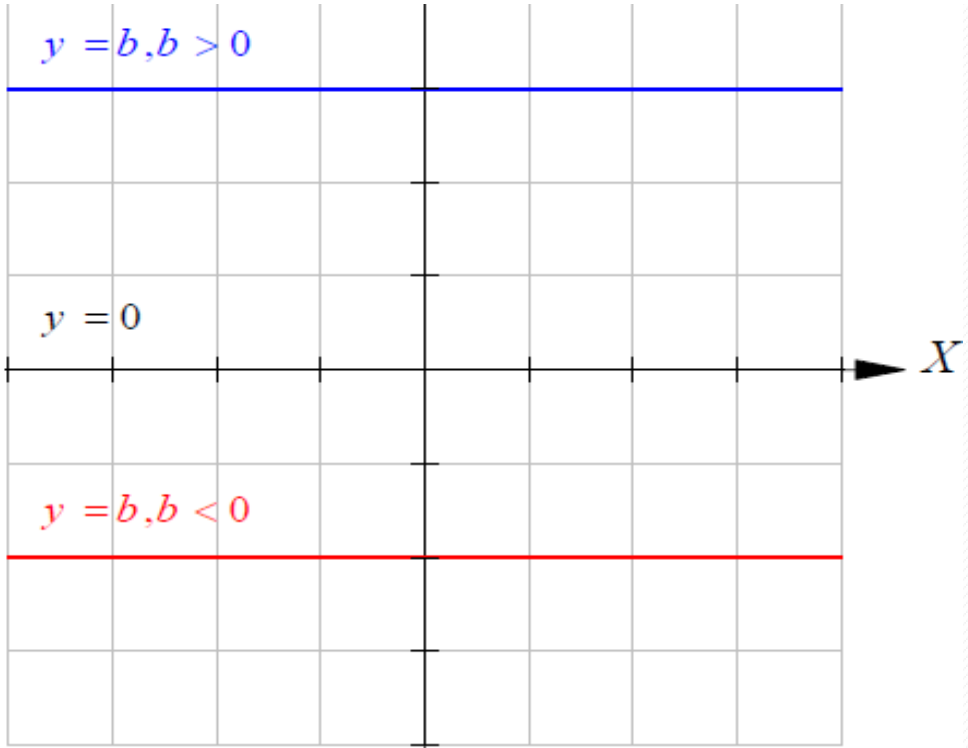
حالات خاصة للميل

1) إذا كان الخط المستقيم أفقياً (أي أنه يوازي محور السينات)، يكون الميل منعدم $(m = 0)$.

معادلة المستقيم الأفقي

معادلة الخط المستقيم الأفقي الموازي لمحور السينات ويبعد عنه مسافة مقدارها b هي

$$y = b$$

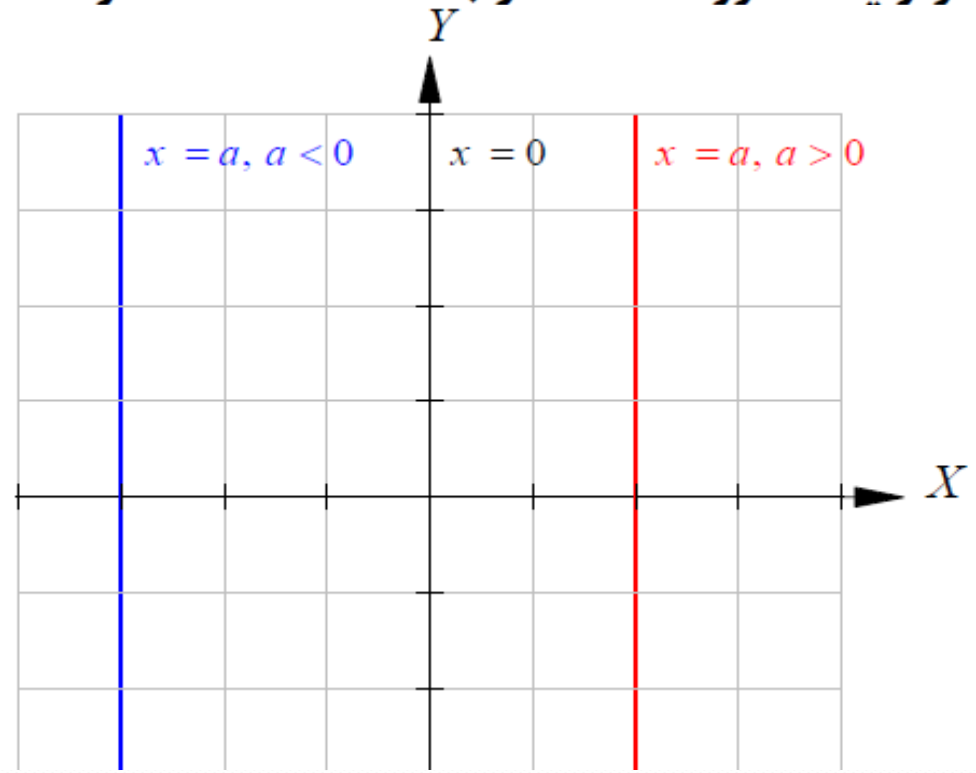


2) إذا كان الخط المستقيم رأسياً (أي أنه يوازي محور الصادات)، يكون الميل غير معرف $(m=\infty)$.

معادلة المستقيم الرأسي

معادلة الخط المستقيم الرأسي الموازي لمحور الصادات ويبعد عنه مسافة مقدارها a هي

$$x = a$$



مثال (2)

$y = 10$

معادلة الخط المستقيم الأفقي وميله صفر ويوازي المحور السيني.
ويقطع المحور الصادي في نقطة هي (0,10)

$x = 4$

معادلة الخط المستقيم الرأسي وميله غير معرف ويوازي المحور الصادي.
ويقطع المحور السيني في نقطة هي (4,0)

$x = 0$ هي معادلة المحور الصادي وهو خط رأسي ميله غير معرف ويمر بنقطة الأصل

$y = 0$ هي معادلة المحور السيني وهو خط أفقي ميله صفر ويمر بنقطة الأصل

3) إذا كان الخط المستقيم يميل في جزئه العلوي نحو اليمين يكون الميل موجباً.

4) إذا كان الخط المستقيم يميل في جزئه العلوي نحو اليسار يكون الميل سالباً.

الصور المختلفة لمعادلات الخط المستقيم

1. معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويقطع محور الصادات في النقطة $(0,c)$ هي:

$$y = mx + c$$

حيث أن m هو ميل الخط المستقيم وَ c هو الجزء المقطوع من محور الصادات Y .

لاحظ أنه لرسم مستقيم يكفي معرفة نقطتين تحققان معادلة المستقيم ثم نصل بينهما بخط مستقيم.

مثال (3)

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$ و يقطع جزء قدره -1 من محور الصادات.

الحل:

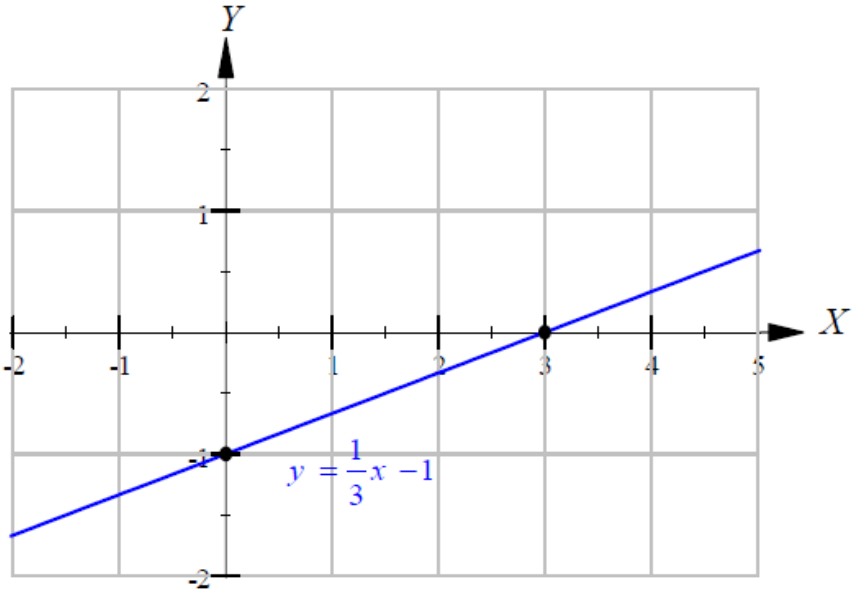
الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هى:

$$y = mx + c$$

$$m = \frac{1}{3}$$

$$c = -1$$

$$y = \frac{1}{3}x - 1$$



إيجاد الميل بدلالة مستقيم معادلته هي $Ax + By + D = 0$

الميل هو $m = \frac{-A}{B}$

الجزء المقطوع من محور الصادات هو $C = \frac{-D}{B}$

إيجاد الميل بدلالة مستقيم معادلته هي $y = mx + c$

الميل هو m

الجزء المقطوع من محور الصادات هو C

مثال (4)

من المعادلات التالية أوجدي ميل خط المستقيم والجزء المقطوع من المحور y

1) $y = 5x - 4$

$m = 5 \quad ; \quad c = -4$

2) $3y = 9x - 15$

$\frac{3}{3}y = \frac{9}{3}x - \frac{15}{3}$

$y = 3x - 5$

$m = 3 \quad ; \quad c = -5$

3) $2x + 4y = 20$

$2x + 4y - 20 = 0$

$A = 2 \quad , \quad B = 4 \quad , D = -20$

$m = \frac{-A}{B} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad ;$

$c = \frac{-D}{B} = \frac{-(-20)}{4} = \frac{20}{4} = 5$

4) $3x + 5y + 3 = 0$

$A = 3 \quad , \quad B = 5 \quad , D = 3$

$m = \frac{-3}{5} \quad ; \quad D = \frac{-3}{5}$

2. معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل ونقطة واقعة عليه

إذا كان الخط المستقيم الذي ميله m يمر بالنقطة (x_1, y_1)، فإن معادلته:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

وأحياناً تكتب

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال (5)

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2,2)$ وميله $\frac{1}{2}$.

الحل:

$$m=\frac{1}{2}\ ,\ (x_1,y_1)=(-2,2)\ \Rightarrow\ x_1=-2\ ,\ y_1=2$$

معادلة الخط المستقيم هي:

$$y-y_1=m(x-x_1)\quad\Rightarrow\quad y-2=\frac{1}{2}(x-(-2))$$

$$\Rightarrow\quad y-2=\frac{1}{2}(x+2)$$

$$\Rightarrow y-2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\times 2\Rightarrow y-2=\frac{1}{2}x+1$$

$$y=\frac{1}{2}x+1+2\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+3$$

إيجاد معادلة مستقيم بدلالة نقطتين عليه

إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (x_1,y_1) , (x_2,y_2) فإن معادلته:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

مثال (6) أوجدي معادلة مستقيم يمر بالنقطتين $(-2,-1)$, $(-3,8)$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Leftrightarrow\frac{y+1}{x+2}=\frac{8+1}{-3+2}$$

$$\frac{y+1}{x+2}=\frac{9}{-1}\Leftrightarrow 9(x+2)=(-1)(y+1)$$

$$9x+18=-y-1\Leftrightarrow 9x+y+18+1=0$$

$$9x+y+19=0$$

نظرية (الموازي والعمودي)

إذا كانت معادلة المستقيم L_1 هي $y = m_1 x + c_1$ ومعادلة المستقيم L_2 هي $y = m_2 x + c_2$ فإن:

1) إذا كان $m_1 = m_2$ ، فالمستقيمان متوازيان (أي أن ميل المستقيمين المتوازيين متساوي).

2) إذا كان $(m_1)(m_2) = -1$ ، فالمستقيمان متعامدان (أي أن ميل أحد المستقيمين المتعامدين هو مقلوب ميل الآخر بإشارة مخالفة).

مثال (7)

إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{9}{8}$ فإن ميل المستقيم الموازي له هو $\frac{9}{8}$

وميل المستقيم العمودي له هو $-\frac{8}{9}$

إذا كان ميل المستقيم هو $7-$ فإن ميل المستقيم الموازي له هو -7

وميل المستقيم العمودي له هو $\frac{1}{7}$

مثال (8)

أوجدي ميل الموازي والعمودي للمستقيم يمر بنقطتين $(3,5),(6,-7)$

الميل هو $m_1 = \frac{-7-5}{6-3} = \frac{-12}{3} = -4$

الميل الموازي هو $m_2 = m_1 = -4$

الميل العمودي هو $m_3 = \frac{-1}{m_1} = \frac{1}{4}$

مثال (9)

أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $2x+3y+7=0$ ويمر بالنقطة $(3,4)$

الحل:

ميل خط المستقيم $2x+3y+7=0$ هو $m_1=\frac{-2}{3}$

بما أن المستقيمان متوازيان فإن $m_1=m_2$ إذاً $m_2=\frac{-2}{3}$

بما أن هذا الخط يمر بالنقطة $(3,4)$ إذاً معادلته تعطى من :

$$y-y_1=m(x-x_1)\Leftrightarrow y-4=\frac{-2}{3}(x-3)$$

$$3(y-4)=3\times\frac{-2}{3}(x-3)$$

$$3y-12=-2(x-3)\Leftrightarrow 3y-12=-2x+6$$

$$3y+2x-12-6=0\Leftrightarrow \boxed{3y+2x-18=0}$$

مثال (10)

أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم $3x-4y+9=0$ ويمر بالنقطة $(1,2)$

الحل:

ميل خط المستقيم $3x-4y+9=0$ هو $m_1=\frac{3}{4}$

بما أن المستقيمان متعامدان فإن $m_2=\frac{-1}{m_1}$ إذاً $m_2=\frac{-4}{3}$

ومعادلة المستقيم العمودي هي:

$$y-y_1=m(x-x_1)\Leftrightarrow y-2=\frac{-4}{3}(x-1)$$

$$3(y-2)=3\times\frac{-4}{3}(x-1)$$

$$3y-6=-4(x-1)\Leftrightarrow 3y-6=-4x+4$$

$$3y+4x-6-4=0\Leftrightarrow \boxed{3y+4x-10=0}$$