الفصل الأول : معادلات من الدرجة الأولى

المعادلة

المعادلة عبارة عن تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مكتوب على صيغة طرفين بينهما إشارة تساوي وتسمى هذه المتغيرات مجاهيل. وحل المعادلة نقصد به إيجاد قيم المجاهيل العددية التي تحقق المعادلة. ويمكن أن نعرف المعادلة على أنها مساواة بين تعبيرين رياضيين مثل:

$x^2 - x = x + 2$ ، $x + 4 = 9$.

معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد

وتسمى أيضاً بالمعادلة الخطية والصورة العامة للمعادلة الخطية في مجهول واحد x هي:

$$ax + c = 0, \quad a, c \in R, \quad a \neq 0$$

حل المعادلة السابقة هو $a \neq 0 \quad , \quad x = -\dfrac{c}{a}$

قاعدة هامة:

لحل معادلات الدرجة الأولى (الخطية) في مجهول واحد فإننا نقوم بوضع المجاهيل (المتغيرات) في طرف ونضع الأعداد في الطرف الآخر ثم نقسم على معامل المتغير. لاحظ أنه عند نقل حد من طرف لآخر نغير إشارته.

مثال

أوجدي قيمة t التي تحقق المعادلة $3t + 5 = 14$

الحل

$$3t = 14 - 5$$

$$3t = 9$$

$$\frac{3t}{3} = \frac{9}{3}$$

$$t = 3$$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$3x - 7 = 2x + 1$$

الحل

$$3x = 2x + 1 + 7$$

$$3x - 2x = 1 + 7$$

$$x = 8$$

مثال

أوجدي قيمة y التي تحقق المعادلة

$$-5(2 - y) = 15$$

الحل

$$-10 + 5y = 15$$

$$5y = 15 + 10$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{25}{5}$$

$$y = 5$$

حل المعادلات من الدرجة الأولى في مجهول واحد في صورة كسر

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$\frac{x-1}{3}=\frac{1}{2}$$

الحل

حاصل ضرب الوسطين = حاصل ضرب الوسطين وعليه نحصل على :

$$2(x-1)=3(1)$$

$$2x-2=3$$

$$2x=3+2$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{5}{2}$$

$$x=\frac{5}{2}$$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$\frac{x-2}{2}+\frac{x+4}{3}=0$$

الحل

$$\frac{3(x-2)+2(x+4)}{6}=\frac{0}{1}$$

$$3(x-2)+2(x+4)=6(0)$$

$$3x-6+2x+8=0$$

$$3x+2x=-8+6$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{-2}{5}\Leftrightarrow x=\frac{-2}{5}$$

حل المعادلات من الدرجة الأولى في مجهول واحد في صورة جذر

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$\sqrt{x} - 3 = 0$$

الحل

$$\sqrt{x} = 3$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (3)^2$$

$$x = 9$$

مثال

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة

$$\sqrt[3]{x+1} - 2 = 0$$

الحل

$$\sqrt[3]{x+1} = 2$$

$$\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 = (2)^3$$

$$x + 1 = 8$$

$$x = 8 - 1$$

$$x = 7$$

معادلات الدرجة الأولى في مجهولين

إذا كان لدينا المعادلتين:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

وهما يمثلان هندسياً خطين مستقيمين. عند حل المعادلتين يجب دراسة الحالات الثلاث الآتية:

1) الحالة الأولى: إذا كان $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$، فإن المعادلتين تمثلان خطين مستقيمين متوازيين غير متقاطعين وبالتاي فإن المعادلتين ليس لهما حل.

2) الحالة الثانية: إذا كان $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$، فإن المعادلتين تمثلان خطين مستقيمين منطبقين وفي هذه الحالة يوجد للمعادلتين عدد لا نهائي من الحلول .

3) الحالة الثالثة: إذا كان $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$، فإن المعادلتين تمثلان خطين مستقيمين متقاطعين في نقطة واحدة وعندئذ فإن للمعادلتين حل جبري وحيد.

مثال

حددي نوع المعادلتين ثم أوجدي الحل إن وجد

$$2x + 3y + 7 = 0$$
$$4x + 6y + 9 = 0$$

الحل

$$2x + 3y = -7$$
$$4x + 6y = -9$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{2\times 1}{2\times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{3\times 1}{3\times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-9} = \frac{7}{9}$$

نجد أن $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

إذاً الخطان متوازيان وليس للمعادلتين حل.

مثال

حددي نوع المعادلتين ثم أوجدي الحل إن وجد

$$2x + 3y + 7 = 0$$
$$6x + 9y + 21 = 0$$

الحل

$$2x + 3y = -7$$
$$6x + 9y = -21$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{6} = \frac{2\times 1}{2\times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{9} = \frac{3\times 1}{3\times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-21} = \frac{-7\times 1}{-7\times 3} = \frac{1}{3}$$

نجد أن $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

إذاً الخطان منطبقين وعليه يوجد عدد لا نهائي من الحلول لأن كل نقطة على الخط الأول تقع علي الخط الثاني.

مثال

حددي نوع المعادلتين

$$3x + y - 3 = 0$$
$$5x - y - 13 = 0$$

الحل

$$3x + y = 3$$
$$5x - y = 13$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-1} = -1$$

نجد أن $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

إذاً الخطان المستقيمان متقاطعان في نقطة واحدة , بالتالي يوجد حل وحيد.

طرق حل المعادلات من الدرجة الأولى في مجهولين

إذا كان لدينا المعادلتين:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

فإننا نستطيع حلهما إما بطريقة التعويض أو الحذف.

أولاً: طريقة التعويض

نوجد قيمة x بدلالة y من إحدى المعادلتين ثم نعوض بقيمة x في المعادلة الأخرى أو العكس نوجد قيمة y بدلالة x من إحدى المعادلتين ثم نعوض بقيمة y في المعادلة الأخرى.

ثانياَ: طريقة الحذف

1) نجعل معاملات أحد المجهولين x أو y متساوية مع اختلاف الإشارة.
2) نجمع المعادلتين فيصبح لدينا معادلة واحدة من الدرجة الأولى في مجهول واحد.
3) نوجد قيمة أحد المجهولين ثم نعوض في إحدى المعادلتين الأصلية لإيجاد قيمة المجهول الثاني.

حل المثال السابق

طريقة الحذف

$$3x + y = 3 \qquad (1)$$

$$5x - y = 13 \qquad (2)$$

$$+ - - - - - - - - - - - - -$$

$$8x = 16$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{16}{8}$$

$$\boxed{x = 2}$$

نعوض عن قيمة x في المعادلة (1) نحصل على :

$$3(2) + y = 3$$

$$6 + y = 3$$

$$y = 3 - 6$$

$$\boxed{y = -3}$$

طريقة التعويض

من المعادلة (1) نجد أن :

$$3x + y = 3$$

$$\boxed{y = 3 - 3x} \qquad (3)$$

نعوض في المعادلة (2) نجد أن :

$$5x - (3 - 3x) = 13$$

$$5x - 3 + 3x = 13$$

$$5x + 3x = 13 + 3$$

$$8x = 16$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{16}{8}$$

$$\boxed{x = 2}$$

نعوض عن قيمة x في المعادلة (3) نجد أن :

$$y = 3 - 3(2)$$

$$y = 3 - 6$$

$$\boxed{y = -3}$$

مثال

حل المعادلتين:

$$x + 2y = 8 \qquad (1)$$
$$-x - 3y = -13 \qquad (2)$$

الحل

طريقة الحذف (بما أن $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_1}{a_2}$ ، فإن للمعادلتين حل وحيد)

$$x + 2y = 8$$
$$-x - 3y = -13$$
$$+ - - - - - - - - - - - - - -$$
$$-y = -5$$
$$\frac{-y}{-1} = \frac{-5}{-1}$$
$$\boxed{y = 5}$$

نعوض عن قيمة y في المعادلة (1) نحصل على :

$$x + 2(5) = 8 \Leftrightarrow x + 10 = 8$$
$$x = 8 - 10 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

مثال

حل المعادلتين:

$$2a+5b=-21 \qquad (1)$$
$$7a-3b=-12 \qquad (2)$$

الحل

طريقة الحذف (بما أن $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ، فإن للمعادلتين حل وحيد)

$$2a+5b=-21 \qquad \times 3$$
$$7a-3b=-12 \qquad \times 5$$
$$------------------$$
$$6a+15b=-63$$
$$35a-15b=-60$$
$$+-----------------$$
$$41a=-123$$
$$\frac{41a}{41}=\frac{-123}{41}$$
$$\boxed{a=-3}$$

نعوض عن قيمة a في المعادلة (1) نحصل على :

$$2(-3)+5b=-21$$
$$-6+5b=-21$$
$$5b=-21+6$$
$$5b=-15$$
$$\frac{5b}{5}=\frac{-15}{5}$$
$$\boxed{b=-3}$$